Acta Sci. Math. 46 (1983), 85—98

Schwach distributive Verbände. II

A. P. HUHN

In [4] und [5] wurde der Begriff des n-distributiven Verbandes eingeführt. In denselben Arbeiten wurden Charakterisierungen der n-distributivität und, ohne diese weiter auszuführen, Beispiele für n-distributive Verbände angegeben. Ziel vorliegender Arbeit ist, diese früheren Arbeiten durch Angabe der noch nicht veröffentlichten Beweisen zu vervollständigen.

In der Einführung von [5] haben wir unserer Meinung Ausdruck gegeben, dass die wichtigsten Gebiete in dieser Theorie die folgenden sind:

a) Verallgemeinerung der „reinen Theorie" der distributiven Verbände, vor allem bei Anwesenheit der Modularität, die für $n\geqq 2$ keine Folgerung der n-Distributivität ist (vgl. die nachfolgende Definition).

b) Untersuchung der Beziehungen zwischen der n-Distributivität und der Dimension von projektiven Geometrien.

c) Anwendungen auf die Theorie der Varietäten von Verbänden.

d) Untersuchung der n-Distributivität in Kongruenzverbänden universeller Algebren, hauptsächlich in Normalteilerverbänden von Gruppen.

Untersuchungen zu a) haben wir in [5] begonnen und in [11] fortgesetzt. Die Gebiete b) und c) wurden in [9] bzw. [8] und [10] behandelt. Hier werden wir uns mit dem Gebiet d) beschäftigen. Da die Definitionen seit dem Erscheinen von [5] in neueren Arbeiten verändert worden sind, ist es nötig zuerst die Begriffe festzulegen.

Ein Verband heisst n-distributiv, wenn er der Identität

$$x\wedge\bigvee_{i=0}^{n} y_i=\bigvee_{j=0}^{n}\Big[x\wedge\bigvee_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n} y_i\Big]$$

genügt. Diese Definition ist dual zu der Definition in [5], und die Modularität wird

Eingegangen am 24. August 1982.

nicht mehr wie in [5] gefordert. Es sei aber bemerkt, dass in dieser Arbeit nichtmodulare n-distributive Verbände fast keine Rolle spielen. Diese werden in zwei anderen Arbeiten betrachtet [12], wo wir uns mit Kontraktionen-Verbänden von Graphen und mit Verbänden von konvexen Mengen beschäftigen.

1. Der Chinesische Restsatz in universellen Algebren

Genau so, wie im Bereich der ganzen Zahlen, können Kongruenzsysteme in beliebigen universellen Algebren definiert werden. Es seien A eine universelle Algebra, $\Theta(A)$ der Kongruenzverband von A und $a_1, a_2, \ldots, a_k \in A, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k \in \Theta(A)$. Dann heisst das System

(1) $$x \equiv a_i\,(\theta_i), \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

ein Kongruenzsystem über A mit der Unbekannten x. Es ist klar, wie die Lösbarkeit und die Lösungen eines solchen Systems zu definieren sind.

Definition. Eine Algebra A genügt dem Chinesischen Restsatz der Ordnung n (oder in Zeichen: dem C_n-Satz), wenn für beliebige

$$a_1, a_2, \ldots, a_k \in A \quad \text{und} \quad \theta_1, \quad \theta_2, \ldots, \theta_k \in \Theta(A), \quad k > n+1,$$

die Lösbarkeit aller $(n+1)$-elementigen Teilsysteme von (1) auch die Lösbarkeit des ganzen Systems (1) nach sich zieht. (Ein n-elementiges „Teilsystem" braucht nicht aus n verschiedenen Kongruenzen zu bestehen, da identische Kongruenzen in (1) unter verschiededen Indizes aufgezählt werden können.)

Wie leicht zu sehen ist, besagt der klassische Chinesische Restsatz, dass der Ring der ganzen Zahlen dem C_1-Satz genügt. Eine Verbingung des C_n-Satzes mit der n-Distributivität ist in dem nächsten Satz enthalten.

1.1. Satz. *Damit eine universelle Algebra A dem C_n-Satz genügt, ist es notwendig und hinreichend, dass für beliebige Kongruenzen $\varphi, \theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_n \in \Theta(A)$ die Identität*

(2) $$\varphi \cdot \bigwedge_{i=0}^{n} \theta_i = \bigwedge_{j=0}^{n} \left[\varphi \cdot \bigwedge_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} \theta_i\right]$$

gilt, wobei $\cdot$ und $\bigwedge$ das Produkt bzw. den Durschschnitt von Relationen bezeichnet. Wenn die Kongruenzen von A vertauschbar sind, d. h., wenn für beliebige $\theta, \varphi \in \Theta(A)$ $\theta\varphi = \varphi\theta$ gilt, so genügt A genau dann dem C_n-Satz, wenn $\Theta(A)$ n-distributiv ist.

Beweis. Die zweite Aussage des Satzes folgt aus der ersten. In der Tat stimmt unter den Bedingungen der zweiten Aussage das Produkt der Kongruenzen von

A mit dem Supremum überein. Hieraus folgt die duale n-distributivität von $\Theta(A)$. Im Falle der Vertauschbarkeit der Kongruenzen ist aber $\Theta(A)$ auch modular und in modularen Verbänden ist die n-Distributivität selbstdual ([5]). Also reicht es, nur die erste Aussage zu beweisen. Wir schicken die folgenden zwei einfachen Bemerkungen voraus:

1. Ist x_0 eine Lösung des Systems (1), so ist die allgemeine Lösung von (1)

$$x \equiv x_0 \left(\bigwedge_{i=1}^{k} \theta_i \right).$$

2. Für $k=2$ ist (1) genau dann lösbar, wenn $a_1\, \theta_1 \theta_2\, a_2$ gilt.

Nun zeigen wir dass die Bedingung des Satzes hinreichend ist. Es sei $1 \leqq i_1 < < i_2 < \ldots < i_r \leqq k$, und es bezeichne $\mathfrak{K}(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ das folgende Teilsystem von (1):

$$x \equiv a_{i_j}\ (\theta_{i_j}), \quad j = 1, 2, \ldots, r.$$

$\mathfrak{K}(1, 2, \ldots, n+1)$ ist lösbar. Es sei $n+1 \leqq r < k$. Wir zeigen, dass die Lösbarkeit von $\mathfrak{K}(1, 2, \ldots, r+1)$ aus der Lösbarkeit von $\mathfrak{K}(1, 2, \ldots, r)$ folgt.

Es sei x_0 eine Lösung von $\mathfrak{K}(1, 2, \ldots, r)$. Dann ist die allgemeine Lösung von $\mathfrak{K}(1, 2, \ldots, r)$

$$x \equiv x_0 \left(\bigwedge_{i=1}^{r} \theta_i \right).$$

Es genügt zu zeigen, dass diese Kongruenz zusammen mit $\mathfrak{K}(r+1)$ ein lösbares System bildet, d. h., dass die folgende Relation gilt:

$$a_{r+1}\ \theta_{r+1} \cdot \bigwedge_{i=1}^{r} \theta_i\ x_0. \tag{3}$$

Es sei $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \subseteqq \{1, 2, \ldots, r\}$. Dann ist x_0 eine Lösung von $\mathfrak{K}(i_1, \ldots, i_n)$. Die allgemeine Lösung von $\mathfrak{K}(i_1, \ldots, i_n)$ ist

$$x \equiv x_0 \left(\bigwedge_{j=1}^{n} \theta_{i_j} \right).$$

$\mathfrak{K}(i_1, \ldots, i_n, r+1)$ ist aber lösbar, also gilt

$$a_{r+1}\ \theta_{r+1} \cdot \bigwedge_{j=1}^{n} \theta_{i_j}\ x_0.$$

So erhalten wir

$$a_{r+1} \bigwedge_{\substack{K \subseteqq \{1, 2, \ldots, r\} \\ |K| = n}} \left[\theta_{r+1} \cdot \bigwedge_{i \in K} \theta_i\right] x_0. \tag{4}$$

Wir werden nun zeigen, dass folgende Gleichung gilt:

$$(5)\qquad \theta_{r+1}\cdot \bigwedge_{i=1}^{r} \theta_i = \bigwedge_{\substack{K\subseteq\{1,2,\ldots,r\}\\ |K|=n}} \Big[\theta_{r+1}\cdot \bigwedge_{i\in K} \theta_i\Big].$$

Durch Einsetzen von (5) in (4) ergibt sich dann (3).

Um (5) aus (2) herzuleiten, zeigen wir durch Induktion, dass für beliebige $s\geqq n$ und Kongruenzen $\varphi, \psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_s \in \Theta(A)$ die Identität

$$(2_s)\qquad \varphi\cdot \bigwedge_{i=0}^{s} \psi_i = \bigwedge_{\substack{K\subseteq\{0,1,\ldots,s\}\\ |K|=n}} \Big[\varphi\cdot \bigwedge_{i\in K} \psi_i\Big]$$

gilt. (Man erhält dann (5) aus (2_{r-1}), indem man φ durch θ_{r+1} und ψ_i durch θ_{i+1} ersetzt.)

Für $s=n$ ist (2_s) mit (2) identisch. Es sei $s>n$ und nehmen wir an, dass (2_{s-1}) bewiesen ist. Es seien $\varphi, \psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_s \in \Theta(A)$. Es sei ferner

$$\chi_i = \begin{cases} \psi_i & \text{für}\quad i = 0, 1, \ldots, n-1,\\ \bigwedge_{j=n}^{s} \psi_j & \text{für}\quad i = n. \end{cases}$$

Dann können wir (2) anwenden:

$$\varphi\cdot \bigwedge_{i=0}^{s} \psi_i = \varphi\cdot \bigwedge_{i=0}^{n} \chi_i = \bigwedge_{j=0}^{n} \Big[\varphi\cdot \bigwedge_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n} \chi_i\Big] = \Big[\varphi\cdot \bigwedge_{i=0}^{n-1} \psi_i\Big] \wedge \bigwedge_{j=0}^{n-1} \Big[\varphi\cdot \bigwedge_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{s} \psi_i\Big].$$

Auf der rechten Seite kann die Induktionsvoraussetzung angewendet werden und der somit erhaltene Ausdruck ist die rechte Seite von (2_s). Damit ist die Hinlänglichkeit der Bedingung bewiesen.

Um die Notwendigkeit zu zeigen, nehmen wir an, dass für gewisse Kongruenzen $\varphi, \theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_n \in \Theta(A)$ gilt:

$$\varphi\cdot \bigwedge_{i=0}^{n} \theta_i \neq \bigwedge_{j=0}^{n} \Big[\varphi\cdot \bigwedge_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n} \theta_i\Big].$$

Dann ist die rechte Seite kleiner als die linke Seite, d. h., es gibt Elemente $a, b\in A$, so dass $a\ \varphi\cdot \bigwedge_{i=0}^{n} \theta_i\ b$ ungültig, aber $a \bigwedge_{j=0}^{n} \Big[\varphi\cdot \bigwedge_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n} \theta_i\Big] b$ gültig ist. Daraus folgt, dass die $(n+1)$-elementigen Teilsysteme des Systems

$$\begin{aligned} x &\equiv a\ (\varphi)\\ x &\equiv b\ (\theta_0)\\ &\ \vdots\\ x &\equiv b\ (\theta_n) \end{aligned}$$

lösbar sind, das ganze System aber unlösbar ist. Damit ist der Satz bewiesen.

Der Fall $n=1$ dieses Satzes ist bekannt (siehe Grätzer [2]). Grätzer hat das folgendes bewiesen: Es sei A eine universelle Algebra. Damit für alle $k>2$ und Kongruenzen $x\equiv a_i\,(\theta_i)$, $i=1,2,\ldots,k$, über A die Bedingungen $a_i\equiv a_j\,(\theta_i\vee\theta_j)$, $i\neq j$, $i,j=1,2,\ldots,k$, die Lösbarkeit von (1) nach sich ziehen, ist es notwendig und hinreichend, dass $\Theta(A)$ distributiv ist und seine Elemente vertauschbar sind. Es ist noch eine offene Frage, wie dieser Satz sich für beliebige n verallgemeinern älsst.

2. Mal'cev-Polynome

Im folgenden beschäftigen wir uns mit dem C_n-Satz für Varietäten. Man findet den folgenden Satz in [6]. Weitere, äquivalente Bedingungen wurden von BAKER und PIXLEY [1] und von PIXLEY [16] gefunden.

2.1. Satz. *Für eine beliebige Varietät* $\mathbf{V}$ *und natürliche Zahl* n *sind die folgenden Bedingungen äquivalent.*

(A) *Jede Algebra* $A\in\mathbf{V}$ *genügt dem* C_n*-Satz.*

(B) *Für beliebige* $A\in\mathbf{V}$ *und Kongruenzen* $\varphi,\theta_0,\theta_1,\ldots,\theta_n\in\Theta(A)$ *gilt*

$$\varphi\cdot\bigwedge_{i=0}^{n}\theta_i=\bigwedge_{j=0}^{n}\Big[\varphi\cdot\bigwedge_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n}\theta_i\Big].$$

(C) *Es gibt ein Term* μ *in* $n+2$ *Variablen über* $\mathbf{V}$, *so dass*

$$\mu(x,\ldots,x,y)=\mu(x,\ldots,x,y,x)=\ldots=\mu(y,x,\ldots,x)=x$$

eine Identität von $\mathbf{V}$ *ist.*

Bemerkung. Der Fall $n=1$ ist schon von WILLE in [19] behandelt worden.

Beweis. (A)$\Leftrightarrow$(B) folgt aus Satz 1.1.

(B)$\Leftrightarrow$(C). Nehmen wir an daß (B) gilt. Es bezeichne $F(n+2)$ die freie Algebra in $\mathbf{V}$ mit den freien Erzeugenden $a_0,a_1,\ldots,a_{n+1}$. Es sei θ_i die kleinste Kongruenz, so dass $a_0,\ldots,a_{i-1},a_{i+1},\ldots,a_{n+1}$ modulo θ_i untereinander kongruent sind. Dann gelten

$$a_0\ \theta_{n+1}\ a_i\quad(i=0,1,\ldots,n)$$

$$a_i\ \theta_j\ a_{n+1}\quad(i,j=0,1,\ldots,n,\quad i\neq j)$$

Daraus folgt

$$a_0\left[\theta_{n+1}\cdot\bigwedge_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\theta_j\right]a_{n+1}.$$

Somit gibt es ein Element $\mu(a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}) \in F(n+2)$, mit

$$a_0 \ \theta_{n+1} \ \mu(a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}) \ \bigwedge_{i=0}^{n} \theta_i \ a_{n+1}.$$

Es folgt also

$$a_0 \ \theta_{n+1} \ \mu(a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}) \quad \theta_{n+1} \quad \mu(a_0, a_0, \ldots, a_0, a_{n+1}).$$

θ_{n+1} ist aber trivial auf der durch $\{a_0, a_{n+1}\}$ erzeugten Teilalgebra, daher ergibt sich

$$a_0 = \mu(a_0, \ldots, a_0, a_{n+1}).$$

Genau so folgt aus $\mu(a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}) \, \theta_i \, a_{n+1} \ (i=0, 1, \ldots, n)$, dass

$$\mu(a_{n+1}, \ldots, a_{n+1}, a_i, a_{n+1}, \ldots, a_{n+1}) = a_{n+1}$$

für $i=0, 1, \ldots, n$ gilt. Damit ist (C) bewiesen.

Nehmen wir umgekehrt an, dass (C) gilt, d. h., dass ein μ mit der obigen Eigenschaft existiert. Wir werden zeigen, dass für beliebige Kongruenzen $\varphi, \theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_n$ irgendeiner Algebra A in $\mathbf{V}$

$$\bigwedge_{j=0}^{n} \Big[\varphi \cdot \bigwedge_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} \theta_i\Big] \leqq \varphi \cdot \bigwedge_{i=0}^{n} \theta_i$$

gilt. (Die umgekehrte Ungleichung ist klar.)

In der Tat, es seien $x, y \in A$ mit

$$x \ \bigwedge_{j=0}^{n} \Big[\varphi \cdot \bigwedge_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} \theta_i\Big] \ y.$$

Dann existieren Elemente $t_0, t_1, \ldots, t_n \in A$, so dass gilt:

$$x \ \varphi \ t_j \ \bigwedge_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} \theta_i \ y \quad (j = 0, 1, \ldots, n).$$

Es sein ferner $t=\mu(t_0, t_1, \ldots, t_n, y)$. Aufgrund der Identitäten für μ in (C) erhält man die folgenden Relationen:

$$x \ \varphi \ t \ \bigwedge_{i=0}^{n} \theta_i \ y.$$

Zum Beispiel erhält man $x \, \varphi \, t$ wie folgt:

$$x = \mu(x, x, \ldots, x, y) \ \varphi \ \mu(t_0, t_1, \ldots, t_n, y) = t.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

3. n-Distributivität in Untergruppenverbänden abelscher Gruppen

Zweck dieses Abschnitt ist es, weitere Beispiele für n-distributive Verbände zu erwähnen und eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür anzugeben, dass der Untergruppenverband einer abelschen Gruppe n-distributiv ist. $S(G)$ (bzw. $N(G)$) wird den Untergruppenverband (bzw. Normalteilerverband) der Gruppe G bezeichnen. Für die Gruppenoperationen werden wir eine multiplikative Schreibweise verwenden. Dementsprechend bezeichnen wir das neutrale Element mit e. $[a_1, a_2, \dots]$ bezeichnet das Erzeugnis der Elemente in den eckigen Klammern.

3.1. Satz. *Für eine beliebige natürliche Zahl n ist der Untergruppenverband der durch n Elemente erzeugten freien abelschen Gruppe U_n ein n-distributiver, aber kein $(n-1)$-distributiver Verband.*

Beweis. Es sein $n \geqq 2$, und es seien die Elemente $u_1, u_2, \dots, u_n$ die freien Erzeugenden von U_n. Ist $v = u_1 u_2 \dots u_n$, so haben wir offensichtlich:

$$[v] \wedge \bigvee_{i=0}^{n} [u_i] = [v] > [e] = \bigvee_{j=1}^{n} \Big[[v] \wedge \bigvee_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} [u_i] \Big],$$

d. h., $S(U_n)$ ist nicht $(n-1)$-distributiv. Für $n=1$ ist dieser Teil der Behauptung trivial. (In Harmonie mit der Definition für $n \geqq 1$ sollen genau die ein-elementigen Verbände als 0-distributiv definiert werden.)

Umgekehrt ist wohlbekannt (vgl. Ore [15]), dass $S(U_1)$ distributiv ist. Sei nun $n > 1$ und nehmen wir an, dass für $k = 1, 2, \dots, n-1$ $S(U_k)$ k-distributiv ist. Es ist die folgende Beziehung zu beweisen:

$$X = A \wedge \bigvee_{i=0}^{n} B_i \leqq \bigvee_{j=0}^{n} \Big[A \wedge \bigvee_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} B_i \Big] = Y,$$

wobei $A, B_0, B_1, \dots, B_n$ beliebige Elemente von $S(U_n)$ sind.

Es sei $a \in X$, d. h. $a = b_0 b_1 \dots b_n \in A$ mit $b_j \in B_j$ $(j = 0, 1, \dots, n)$. Es seien $b_j = u_1^{\beta_{1j}} \dots u_n^{\beta_{nj}}$ $(j = 0, 1, \dots, n)$, wobei $u_1, u_2, \dots, u_n$ die freien Erzeugenden von U_n sind. Wir zeigen: $a \in Y$. Wenn der Rang der Matrix $B = (\beta_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=0,\dots,n}}$ kleiner als n ist, dann ist auch der Rang der Untergruppe $[b_0, b_1, \dots, b_n]$ kleiner als n (siehe Kuroš [13]), und, da diese Untergruppe auch frei ist, folgt

$$[b_0, b_1, \dots, b_n] \cong S(U_k)$$

für ein $k < n$. Nach der Induktionsvoraussetzung ist aber der Verband $S(U_k)$

k-distributiv, also ist er auch n-distributiv. Deshalb erhalten wir

$$[a] = [a] \wedge \bigvee_{i=0}^{n} [b_i] = \bigvee_{j=0}^{n} \Big[[a] \wedge \bigvee_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} [b_i] \Big] \leqq Y,$$

d. h., $a \in Y$.

Also können wir annehmen, dass der Rang von B gleich n ist. Man betrachte nun für ein beliebiges aber festes $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ das Diophantische Gleichungssystem

$$(E_k) \qquad \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \beta_{ij} x_{jk} = \Big[\sum_{l=0}^{n} \beta_{il} \Big] t_k \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

in den Unbekannten x_{jk} $(j \neq k)$ und t_k. Es bezeichne D_k die Determinante von (E_k), d. h., es sei

$$D_k = |\beta_{ij}|_{\substack{i=1, \ldots, n \\ j=0, 1, \ldots, n;\, j \neq k}}$$

Es sei ferner D_{jk} die Determinante, die Durch Ersetzen der Spalte $(\beta_{ij})_{i=1,2,\ldots,n}$ in D_k durch die Spalte $(\beta_{i0} + \beta_{i1} + \ldots + \beta_{in})_{i=1,2,\ldots,n}$ entsteht. Es ist leicht zu sehen, dass

$$(6) \qquad \begin{aligned} x_{jk} &= \frac{D_{jk}}{(D_{0k}, \ldots, D_{k-1,k}, D_k, D_{k+1,k}, \ldots, D_{nk})} \quad (j = 0, 1, \ldots, n;\ j \neq k), \\ t_k &= \frac{D_k}{(D_{0k}, \ldots, D_{k-1,k}, D_k, D_{k+1,k}, \ldots, D_{nk})} \end{aligned}$$

eine Lösung von (E_k) ist, wobei in den Nennern der grösste gemeinsame Teiler von $D_{0k}, \ldots, D_{k-1,k}, D_k, D_{k+1,k}, \ldots, D_{nk}$ steht. Dieser ist nicht 0, da $\operatorname{rang} B = n$ ist. Die Determinanten D_{jk} sind aber Summen oder Differenzen von D_j und D_k, somit gilt

$$(D_{0k}, \ldots, D_{k-1,k}, D_k, D_{k+1,k}, \ldots, D_{nk}) = (D_0, D_1, \ldots, D_k, \ldots, D_n).$$

Deshalb können wir die Lösungen (6) von (E_k) auch in der folgenden Form schreiben.

$$(7) \qquad \begin{aligned} x_{jk} &= \frac{D_{jk}}{(D_0, D_1, \ldots, D_n)} \quad (j = 0, 1, \ldots, n;\ j \neq k), \\ t_k &= \frac{D_k}{(D_0, D_1, \ldots, D_n)}. \end{aligned}$$

Nun können wir das Gleichungssystem betrachten, das sich aus den Systemen (E_k) $(k = 0, 1, \ldots, n)$ und der Gleichung $t_0 + t_1 + \ldots + t_n = 1$ zusammensetzt, d. h., das System

$$(8)\qquad \begin{aligned} &\sum_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} \beta_{ij} x_{jk} = \left[\sum_{l=0}^{n} \beta_{il}\right] t_k \quad (i = 1, \ldots, n;\ k = 0, 1, \ldots, n) \\ &\sum_{k=0}^{n} t_k = 1. \end{aligned}$$

Da der grösste gemeinsame Teiler der Lösungen $t_0, t_1, \ldots, t_n$ in (7) gleich 1 ist, können wir ganze Zahlen $y_0, y_1, \ldots, y_n$ finden, so dass $t_0 y_0 + t_1 y_1 + \ldots + t_n y_n = 1$ gilt. Es seien

$$t'_k = t_k \cdot y_k \quad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

$$x'_{jk} = x_{jk} \cdot y_k \quad (k = 0, 1, \ldots, n;\ j = 0, 1, \ldots, n;\quad j \neq k).$$

t_k und x_{jk} genügen dem Diophantischen Gleichungssystem (8). Es sei $a_k = a^{t'_k}$. Es gilt offenbar $a_0 a_1 \ldots a_n = a$ und $a_k \in A$. Wir zeigen $a_k \in B_0 \vee \ldots \vee B_{k-1} \vee B_{k+1} \vee \ldots \vee B_n$. In der Tat gilt:

$$a_k = a^{t'_k} = (b_0 b_1 \ldots b_n)^{t'_k} =$$

$$= \{(u_1^{\beta_{10}} \ldots u_n^{\beta_{n0}})\,(u_1^{\beta_{11}} \ldots u_n^{\beta_{n1}}) \ldots (u_1^{\beta_{1n}} \ldots u_n^{\beta_{nn}})\}^{t'_k} =$$

$$= u_1^{(\beta_{10}+\ldots+\beta_{1n})\, t'_k} \ldots u_n^{(\beta_{n0}+\ldots+\beta_{nn})\, t'_k} = u_1^{\Sigma(\beta_{1j} x'_{jk} | j \neq k)} \ldots u_n^{\Sigma(\beta_{nj} x'_{jk} | j \neq k)} =$$

$$= (u_1^{\beta_{10}} \ldots u_n^{\beta_{n0}})^{x'_{0k}} \ldots (u_1^{\beta_{1,k-1}} \ldots u_n^{\beta_{n,k-1}})^{x'_{k-1,k}} \cdot (u_1^{\beta_{1,k+1}} \ldots u_n^{\beta_{n,k+1}})^{x'_{k+1,k}} \ldots (u_1^{\beta_{1n}} \ldots u_n^{\beta_{nn}})^{x'_{nk}} =$$

$$= b_0^{x'_{0k}} \ldots b_{k-1}^{x'_{k-1,k}} b_{k+1}^{x'_{k+1,k}} \ldots b_n^{x'_{nk}} \in B_0 \vee \ldots \vee B_{k-1} \vee B_{k+1} \vee \ldots \vee B_n.$$

Es ist also $a_k \in A(B_0 \vee \ldots \vee B_{k-1} \vee B_{k+1} \vee \ldots \vee B_n)$. Es folgt

$$a = a_0 a_1 \ldots a_n \in \bigvee_{j=0}^{n} \left[A \wedge \bigvee_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n} B_i\right] = Y.$$

Q. E. D.

Wir bemerken, dass die Sätze 3.1 und 1.1. auch das Ergebnis von Rado [17] enthalten, dass für Kongruenzen von U_n der C_n-Satz gilt. Rado hat in [17] auch eine gemeinsame Verallgemeingrung des eben zitierten Satzes und des geometrischen Satzes von Helly bewiesen, diese Verallgemeinerung scheint aber von der Theorie der n-distributiven Verbände unabhängig zu sein.

Im nächsten Satz werden die abelsche Gruppen charakterisiert die einen n-distributiven Untergruppenverband haben. Der Rang rang (G) einer abelschen Gruppe G ist die kleinste natürliche Zahl n, so dass jede endlich erzeugte Untergruppe von G durch n Elemente erzeugt wird. Der Rang existiert natürlich nicht für jede abelsche Gruppe.

3.2. Satz. *Damit der Untergruppenverband einer abelschen Gruppe G n-distributiv ist, ist es notwendig und hinreichend, dass der Rang von G kleiner oder gleich n ist.*

Beweis. Es sei $\operatorname{rang}(G) \leqq n$. Wir zeigen, dass für beliebige Untergruppen $A_0, B_0, B_1, \ldots, B_n$ von G

$$X = A \wedge \bigvee_{i=0}^{n} B_i \leqq \bigvee_{j=0}^{n} \Big[A \wedge \bigvee_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} B_i\Big] = Y$$

gilt. Es sei also $a \in X$, d. h., $a = b_0 b_1 \ldots b_n (\in A)$, mit $b_i \in B_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$. Da die Untergruppe $[b_0, b_1, \ldots, b_n]$ durch n Elemente erzeugt werden kann, ist sie ein homomorphes Bild von U_n. Da die Untergruppenverbände abelscher Gruppen isomorph zu ihren Kongruenzverbänden sind, ist $S([b_0, b_1, \ldots, b_n])$ ein Teilverband von $S(U_n)$, und als solcher ist er auch n-distributiv. Folglich gilt

$$[a] = [a] \wedge \bigvee_{i=0}^{n} [b_i] = \bigvee_{j=0}^{n} \Big[[a] \wedge \bigvee_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} [b_i]\Big] \subseteqq Y,$$

d. h., $a \in Y$.

Umgekehrt, nehmen wir an, dass $\operatorname{rang}(G) = r > n$. Dann gibt es eine Untergruppe H von G, die durch r Elemente erzeugbar ist, nicht aber durch $r-1$ Elemente. Es genügt zu zeigen, dass $S(H)$ nicht n-distributiv ist. Nach dem Fundamentalsatz abelscher Gruppen kann H als ein direktes Produkt von zyklischer Gruppen dargestellt werden

$$H = (C_{11} \times \ldots \times C_{1k_1}) \times \ldots \times (C_{s1} \times \ldots \times C_{sk_s}) \times \underbrace{C_\infty \times \ldots \times C_\infty}_{m \text{ Komponente}},$$

wobei C_∞ die unendliche zyklische Gruppe ist, und die anderen Komponenten so bezeichnet sind, dass für gewisse Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_s$ $(p_i \neq p_j$ für $i \neq j)$, die Mächtigkeiten von C_{ij} $(j = 1, 2, \ldots, k_i)$ Potenzen von p_i sind.

Wäre $\max\limits_{1 \leqq i \leqq s} k_i + m < r$, so könnte H als ein direktes Produkt von weniger als r zyklischen Gruppen dargestellt werden (diese sind: $C_{11} \times \ldots \times C_{s1}, C_{12} \times \ldots \times C_{s2}, \ldots, C_\infty$ (m Exemplare)), und so könnte H durch weniger als r Elemente erzeugt werden. Folglich gibt es ein k_i, $k_i + m \geqq r$, so dass $C_{p_i}^r$ ein homomorphes Bild von H ist. Der Verband $S(C_{p_i}^r)$ ist nach [5] nicht $(r-1)$-distributiv, also ist er auch nicht n-distributiv, und dasselbe gilt für $S(H)$. Q. E. D.

Bemerkung. Dieser Satz enthält als Spezialfall das folgende Resultat von Ore [15]: Für eine Gruppe G ist $S(G)$ genau dann distributiv, wenn G lokal zyklisch ist (d. h., wenn $\operatorname{rang} G \leqq 1$ ist).

4. n-Distributivität in Normalteilerverbänden

In diesem Teil möchten wir eine Charakterisierung der n-Distributivität des Normalteilerverbandes einer Gruppe beweisen, die unseren Hauptsatz für abelsche Gruppen auch enthält. Eine solche Charakterisierung folgt durch Anwendung des Hauptsatzes des ersten Teiles [5] dieser Arbeit, d. h. des Satzes, der die n-distributiven Verbände in der Klasse aller modularen Verbände durch den Ausschluss des n-Diamanten (einer speziellen modularen Konfiguration) beschreibt (vgl. auch [8]). Es ist in [3] bewiesen worden, dass in dieser Beschreibung der n-Diamant auch durch den von Neumannschen $(n+1)$-Rahmen ersetzt werden kann. So erhält man:

4.1. Lemma. *Es sei G eine Gruppe. Dann ist $N(G)$ genau dann nicht n-distributiv, wenn Normalteiler A_i $(i=0, 1, \ldots, n)$ und C_{ij} $(i, j=0, 1, \ldots, n,\ i\neq j)$ existieren, so dass $A_0, A_1, \ldots, A_n$ ein unabhängiges System in $N(G)$ bilden und für alle i, j $(i\neq j)$ C_{ij} ein relatives Komplement von A_i und A_j in dem Interval $[A_i\wedge A_j, A_i\vee A_j]$ des Verbandes $N(G)$ ist.*

Um die versprochene Charakterisierung zu formulieren, ist es nötig einige weiteren Begriffe einzuführen. Sind A und B Normalteiler der Gruppe G so dass $A\leqq B$ in $N(G)$ gilt, dann heisst die Faktorgruppe B/A ein Faktor von G. Der Faktor B/A heisst transponiert zu dem Faktor D/C (in Zeichen $B/A\rightarrow D/C$), wenn entweder $A\vee D=B$ und $A\wedge D=C$ oder $B\vee C=D$ und $B\wedge C=A$ gelten. B/A heisst projektiv zu D/C, wenn es Faktoren Y_i/X_i $(i=0, 1, \ldots, m)$ gibt, so dass

$$B/A = Y_0/X_0 \rightarrow Y_1/X_1 \rightarrow \ldots \rightarrow Y_m/X_m = D/C$$

gilt. Die primitive Breite von $N(G)$ ist die grösste natürliche Zahl n, so dass $N(G)$ ein unabhängiges System $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ enthält, für das die Faktoren A_i/U mit $U=\bigwedge\limits_{j=0}^{n-1} A_j$ paarweise projektiv sind. Bezüglich der allgemeinen Definition primitiver Begriffe siehe Wille [20].

Wir brauchen einen weiteren Begriff aus der Gruppentheorie. Es seien A, B, C, D Normalteiler der Gruppe G und es sei $\varphi: B/A\rightarrow D/C$ ein Isomorphismus. φ heisst zentral, wenn gegenüber allen inneren Automorphismen von G invariant ist, mit anderen Worten, wenn für jede $g\in G$ und $x\in B/A$

$$((g^{-1}A)x(gA))\varphi = (g^{-1}C)(x\varphi)(gC)$$

gilt.

4.2. Satz. *Es sei G eine Gruppe. Für eine beliebige natürliche Zahl n sind die folgenden drei Aussagen äquivalent*

(A) *$N(G)$ ist nicht n-distributiv.*

(B) *Die primitive Breite von $N(G)$ ist grösser als n.*

(C) *Es gibt ein unabhängiges System* $A_0, A_1, \ldots, A_n$ *von Elementen von* $N(G)$, *so dass die Faktoren* A_i/U $\left(\textit{mit } U = \bigwedge\limits_{j=0}^{n} A_j\right)$ *aufeinander durch zentralen Isomorphismen von* G *abgebildet werden können.*

Beweis. (A)$\Rightarrow$(B) folgt unmittelbar aus Lemma 4.1.

(B)$\Rightarrow$(C). Sind zwei Faktoren projektiv, so gibt es einen zentralen Isomorphismus zwischen den beiden Faktoren. (In der Tat ist der kanonische Isomorphismus transponierter Faktoren zentral.) Somit ist dieser Teil der Behauptung klar.

(C)$\Rightarrow$(A). Nehmen wir an, dass (C) gilt. Wir definieren die C_{ij} von Lemma 4.1. Es sei φ_{ij} $(i \neq j)$ ein zentraler Isomorphismus von A_i/U auf A_j/U. Es sei $\bar{C}_{ij} = \{x(x\varphi_{ij}) \mid x \in A_i/U\}$. Dann ist $\bar{C}_{ij} \subseteq G/U$. Es sei C_{ij} die Vereinigung aller U-Nebenklassen in $\bar{C}_{ij}$, d. h. $C_{ij} = \bigcup \bar{C}_{ij}$. So erhalten wir eine Teilmenge von G. Wir haben zu beweisen, dass C_{ij} die in Lemma 4.1 formulierten Eigenschaften besitzt. Allgemein wird für einen Normalteiler X mit $U \subseteq X \subseteq G$ der Faktor X/U mit $\bar{X}$ bezeichnet. Wir zeigen, dass die folgenden Aussagen gelten:

(i) $\bar{C}_{ij}$ ist ein Normalteiler von $\bar{G}$.

(ii) $\bar{A}_i \vee \bar{C}_{ij} = \bar{A}_j \vee \bar{C}_{ij} = \bar{A}_i \vee \bar{A}_j$,

(iii) $\bar{A}_i \wedge \bar{C}_{ij} = \bar{A}_j \wedge \bar{C}_{ij} = \bar{A}_i \wedge \bar{A}_j$.

Dann folgen die analogen Eigenschaften für C_{ij}, G, A_i, A_j unmittelbar.

Um (i) zu zeigen, bemerken wir, dass $\bar{C}_{ij}$ eine Untergruppe von $\bar{G}$ ist. In der Tat, ist $\bar{A}_i \vee \bar{A}_j$ das direkte Produkt von $\bar{A}_i$ und $\bar{A}_j$. Deshalb sind die Elemente von $\bar{A}_i$ mit den Elementen von $\bar{A}_j$ vertauschbar. Mit $\varphi = \varphi_{ij}$ sind $x(x\varphi)$ und $y(y\varphi)$ Elemente von $\bar{C}_{ij}$. Dann gelten

$$x(x\varphi)y(y\varphi) = xy(x\varphi)(y\varphi) = (xy)\big((xy)\varphi\big) \in \bar{C}_{ij}$$

und

$$x(x\varphi)x^{-1}(x^{-1}\varphi) = xx^{-1}(x\varphi)(x^{-1}\varphi) = e(xx^{-1})\varphi = e(e\varphi) = e,$$

d. h. $\big(x(x\varphi)\big)^{-1} = x^{-1}(x^{-1}\varphi) \in \bar{C}_{ij}$. Somit ist $\bar{C}_{ij}$ eine Untergruppe. Nun zeigen wir die Normalität. Es sei $a \in \bar{G}$ und $x(x\varphi) \in \bar{C}_{ij}$. Dann gilt

$$a^{-1}\big(x(x\varphi)\big)a = (a^{-1}xa)(a^{-1}(x\varphi)a) = (a^{-1}xa)\big((a^{-1}xa)\varphi\big) \in \bar{C}_{ij}.$$

Damit ist (i) bewiesen.

Es sei z ein Element von $\bar{A}_i \vee \bar{A}_j$. Dann ist z von der Form $z = x(y\varphi)$, $x, y \in \bar{A}_i$. Wir erhalten

$$z = x(y\varphi) = (xy^{-1})\big(y(y\varphi)\big) \in \bar{A}_i \vee \bar{C}_{ij},$$
$$z = x(y\varphi) = \big(x(x\varphi)\big)\big((x^{-1}y)\varphi\big) \in \bar{C}_{ij} \vee \bar{A}_j,$$

d. h. es gilt (ii).

Schliesslich zeigen wir (iii). Es sei $x \in \bar{A}_i \wedge \bar{C}_{ij}$, d. h. $x = y(y\varphi)$ für irgendein Element $y \in \bar{A}_i$. Da jedes Element von $\bar{A}_i \vee \bar{A}_j$ eindeutig als ein Produkt $a_i a_j$

mit $a_i \in \bar{A}_i$, $a_j \in \bar{A}_j$ ausgedrückt werden kann, erhält man aus der Beziehung $xe = y(y\varphi)$ die Relationen $x=y$ und $y\varphi=e$. Somit gilt $x=y=e$, d. h. $\bar{A}_i \wedge \bar{C}_{ij} = \{e\}$, wobei e das Einselement von $\bar{G}$ (d. h. die Untergruppe U) bezeichnet. Ähnlich erhält man $\bar{C}_{ij} \wedge \bar{A}_j = \{U\}$. Damit ist der Satz bewiesen.

Als Anwendung geben wir einen neuen Beweis von Satz 3.2. Der Beweis der Notwendigkeit war leicht. Wir brauchen also nur zu beweisen, dass die angegebene Bedingung hinreichend für die n-Distributivität des Untergruppenverbandes ist. Es sei A eine abelsche Gruppe mit $\operatorname{rang}(A) \leqq n$. Es ist leicht zu sehen, dass $\operatorname{rang}(A') \leqq n$ für jedes homomorphe Bild A' einer Untergruppe von G gilt. Deshalb kann A'' nicht die $(n+1)$-ste direkte Potenz einer Gruppe sein. Also ist kein Faktor von A die $(n+1)$-ste Potenz einer Gruppe, d. h. (C) ist unmöglich: $S(A)(=N(A))$ ist n-distributiv. Q. E. D.

Literaturverzeichnis

[1] K. A. Baker, A. F. Pixley, Polynomial interpolation and the Chinese Remainder Theorem, *Math. Z.*, **143** (1975), 165—174.

[2] G. Grätzer, *Universal Algebra*, van Nostrand (Princeton, N. Y., 1968); 2nd ed.: Springer (Berlin, 1979).

[3] C. Herrmann, A. P. Huhn, Lattices of normal subgroups which are generated by frames, in: *Lattice Theory* (Proc. Conf. Szeged, 1974) Colloquia Math. Soc. J. Bolyai, 14, North-Holland (Amsterdam, 1976), pp. 97—136.

[4] A. P. Huhn, Schwach distributive Verbände, *Acta F. R. N. Univ. Comenianae (Bratislava)*, **1971**, 51—56.

[5] A. P. Huhn, Schwach distributive Verbände. I, *Acta Sci. Math.*, **33** (1972), 297—305.

[6] A. P. Huhn, Weakly distributive lattices, Kurzfassung der Doktorarbeit des Verfassers, Preprint, 1972.

[7] A. P. Huhn, Über einige Fragen der Theorie der primitiven Klassen von Verbänden, *Scripta Sci. Natur. Univ. Purkyniane (Brno)*, **4** (1974), 27—29.

[8] A. P. Huhn, On G. Grätzer's problem concerning automorphisms of a finitely presented lattice, *Algebra Universalis*, **5** (1975), 65—71.

[9] A. P. Huhn, Two notes on n-distributive lattices, in: *Lattice Theory*, (Proc. Conf. Szeged, 1974) Colloquia Math. Soc. J. Bolyai, 14, North-Holland (Amsterdam, 1976), 137—147.

[10] A. P. Huhn, n-distributivity and some questions of the equational theory of lattices, in: *Contributions to Universal Algebra*, (Proc. Conf. Szeged, 1975) Colloquia Math. Soc. J. Bolyai, 17, North-Holland (Amsterdam, 1977), pp. 167—178.

[11] A. P. Huhn, On n-distributive systems of elements of a modular lattice, *Publ. Math. Debrecen*, **27** (1980), 107—115.

[12] A. P. Huhn, On non-modular n-distributive lattices. I—II, in Vorbereitung.

[13] А. Г. Курош, *Теория групп*, Изд. Наука (Москва, 1967).

[14] J. von Neumann, *Lectures on continuous geometries*, Princeton Math. Series 25, Princeton Univ. Press (1960).

[15] O. Ore, Structures and group theory. I—II, *Duke Math. J.*, **3** (1937), 149—173 und **4** (1938), 247—269.

[16] A. F. Pixley, Characterizations of arithmetical varieties, *Algebra Universalis*, **9** (1979), 87—98.

[17] R. Rado, A theorem on Abelian groups, *J. London Math. Soc.*, **22** (1947), 219—226.

[18] M. Suzuki, *Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups*, Springer-Verlag (Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1956).

[19] R. Wille *Kongruenzklassengeometrien*, Lecture Notes in Mathematics 113, Springer (Berlin, 1970).

[20] R. Wille, Primitive Länge und primitive Weite bei modularen Verbänden, *Math. Z.*, **108** (1969), 129—136.

BOLYAI INSTITUTE
ARADI VÉRTANÚK TERE 1
6720 SZEGED, HUNGARY